

פתרון המבחנים משנת תשס"ד

הפתרון אינו רשמי, והינו על דעתי בלבד. אני מקווה שהתשובות נכונות.

מועד א'

1. א. לא נכון. למשל, $X = \{1, 2\}$ והפונקציה $f(x) = 1$ לכל x .
ב. לא נכון. לא מתקיים אם A_ω ריקה. (אני לא בטוח בתשובה הזאת).
ג. נכון.
ד. לא נכון. אגף שמאל שווה ל- A_0 .
ה. נכון. נובע מכך ש- f היא חח"ע.
2. א. לא נכון. הטענה נכונה רק עבור קבוצה סדורה היטב. למשל, לא נכונה עבור $X = Z$ עם הסדר הרגיל.
ב. לא נכון. למשל, $\beta = \omega$ ו- B סיפא אינסופית כלשהי של β . B אינה שקולה לרישא של β הנוצרת ע"י איבר כי כל רישא כזאת היא סופית.
ג. נכון. זהו תנאי הלמה של צורן.
ד. לא נכון. למשל, $\alpha = \omega$ ו- $C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. כאן השרשרת אפילו לא חסומה.
ה. לא נכון. למשל, $X = \{1, 2\}$ עם יחס הסדר $1 < 2$.

3 (חלק ב').

1. לא נכון. למעשה, מתקיים $X \times Y \subseteq P(P(X \cup Y))$.
2. נכון. מתקיים $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.
3. לא נכון. למשל, $f: Z \rightarrow Z$ המוגדרת ע"י $f(n) = n - 1$.
4. נכון.
5. לא בחומר.
6. לא נכון. למשל, $A = \{1, 2\}$, $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = \aleph_0$. מתקיים $\sum_{a \in A} c_a = \prod_{a \in A} d_a = \aleph_0$.

4 (חלק ג').

1. התשובה היא ב'. ראו בעמ' 34 בספר של שמרון.
2. התשובה היא ג'. פתרנו את השאלה בתרגול.
3. התשובה היא ג'.
4. לא בחומר.
5. לא בחומר (אבל טענה ג' כן בחומר והיא נכונה תמיד).
6. התשובה היא ב'. נובע מחישוב ישיר.

מועד ב'

1. א. לא נכון. המשפט תקף תמיד.
ב. נכון. ההתאמה מתקבלת ע"י הפונקציה האופיינית של כל תת קבוצה של X .
ג. נכון.
ד. לא נכון. למשל, $X = \{1, 2\}$ ו- $h(x) = \{1\}$ לכל x .
ה. לא נכון. להיפך, תמיד יש העתקה כזו.
2. א. לא נכון. למשל, $A = N$ עם הסדר הרגיל, $B = N \setminus \{0\}$. B אינה שקולה לרישא הנוצרת ע"י איבר כי כל הרישות כנ"ל הן סופיות.
ב. לא נכון.

ג. לא נכון. רק לשרשרת חסומה יש חסם עליון.
 ד. לא נכון. יתכן שהבחירות של f סותרות זו את זו. למשל, אם $f(X) = x_0$ אז ביחס הסדר הטוב שנבנה חייבים לקבוע את x_0 בתור האיבר המינימלי ואז אם $f(\{x_0, x_1\}) = x_1$, נקבל סתירה.
 ה. לא נכון. מה שנכון הוא ההיפך: כדי להוכיח שאקסיומת הבחירה נכונה עבור $P(X)$ צריך שמשפט הסדר הטוב יהיה נכון עבור X . (אני לא בטוח בתשובה הזאת).

3 (חלק ב')

1. לא נכון. נובע מהגדרת שלושה סדורה וחישוב.
2. לא נכון. כמויות איברי המרחב היא $\aleph_0^{\aleph_0}$.
3. נכון. נובע מכך שפונקציה רציפה נקבעת ע"פ ערכיה בנקודות רציונליות ושימוש בקנטור ברנשטיין.
4. לא נכון. למשל, $X = \{a, b, c\}$ עם יחס הסדר החלקי $a < b, a < c$. התנאים מתקיימים אבל X אפילו לא סדורה לינארית.
5. לא נכון. גבול של סדרת סודרים בני מניה גם הוא בן מניה.
6. לא בחומר.

4 (חלק ג')

1. התשובה היא ב'. נובע ישירות מההגדרה.
2. התשובה היא ב'.
3. התשובה היא ב'. שאר התשובות לא נכונות כי יתכן $b = 0$. ב' נכונה כי לכל מונה אינסופי a מתקיים $a \times a = a$.
4. התשובה היא ב'. עוצמת קבוצת הסדרות הסופיות היא $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n$, עוצמת קבוצת הסדרות הבנות מניה היא a^{\aleph_0} ועבור $a = \aleph$ נקבל $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$, קבוצת תתי הקבוצות מעוצמה a היא אכן 2^a (הוכחנו בתרגול) ובדומה עבור המשלים.
5. התשובה היא ב'. זו הטענה היחידה שלא שקולה לאקסיומת הבחירה אלא נכונה גם בלעדיה.
6. התשובה היא ד'. אם הקבוצות A_i זרות אז אגף שמאל הוא הקבוצה הריקה ואם g אינה חח"ע, ניתן לבנות דוגמא כך שאגף ימין לא יהיה ריק.

בהצלחה רבה במבחן!